

Ref: Rombaldi "Mathématiques par l'agrégation: Algèbre et géométrie"
exo 15.12

Dev n° 36

Titre: Forme quadratique de la trace

Rappel:

$$S_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M \} \quad \text{et} \quad A_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = -M \}$$

On a :

$$\dim(S_n(\mathbb{R})) = n \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \dim(A_n(\mathbb{R})) = n \frac{n-1}{2}.$$

Thm:

Soit $q: M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(M^2)$.

q est une F.Q. non-dégénérée de rang n^2 et de signature :

$$\text{sign}(q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right).$$

De plus, on a $q|_{S_n(\mathbb{R})}$ non dégénérée et $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$.

Démon:

* Π, q - F.Q.

Posons $\mathfrak{L}(\Pi, N) \mapsto \frac{1}{2} (q(\Pi+N) - q(\Pi) - q(N))$, avec $\Pi, N \in M_n(\mathbb{R})$.

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\Pi, N) &= \frac{1}{2} [\text{tr}((\Pi+N)^2) - \text{tr}(\Pi^2) - \text{tr}(N^2)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}(\Pi^2) + \text{tr}(\Pi N) + \text{tr}(N \Pi) + \text{tr}(N^2) - \text{tr}(\Pi^2) - \text{tr}(N^2)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}(\Pi N) + \text{tr}(N \Pi)] \\ &= \text{tr}(\Pi N) \leftarrow \text{F.B.S.} \end{aligned}$$

Donc, q est une F.Q. de forme polaire $\mathfrak{L}$.

* Réduction de Gauss:

Soit $\Pi = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$.

On a :

$$\begin{aligned} q(\Pi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} m_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_{ij} m_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} m_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + \sum_{\substack{i, j \in [1, n] \\ i \neq j}} \left(\frac{1}{2} (m_{ij} + m_{ji})^2 - \frac{1}{2} (m_{ij} - m_{ji})^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + \sum_{\substack{i,j \in [1,n] \\ i \neq j}} \left(\frac{1}{2} (m_{ij} + m_{ji})^2 - \frac{1}{2} (m_{ij} - m_{ji})^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in [1,n] \\ i \neq j}} (m_{ij} + m_{ji})^2}_{:= L_{ij}} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in [1,n] \\ i \neq j}} (m_{ij} - m_{ji})^2}_{:= L_{ji}}
\end{aligned}$$

On a que L_{ii} , L_{ij} et L_{ji} sont des F.L. linéairement indépendantes.
On a donc bien la réduction de Gauss.

* Le signature:

Grâce au point précédent on lit:

$$\hookrightarrow \text{nb F.L. positive: } n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\hookrightarrow \text{nb F.L. négative: } \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{Donc } \text{sign } q = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

* Rang:

$$\text{On a } \text{rg } q = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1+n-1)}{2} = n^2$$

On remarque que $\text{rg } q = \dim M_n(\mathbb{R})$, donc q non dégénérée.

* Orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$:

$\hookrightarrow$ Soient $(M, N) \in A_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$.

On a:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}(M, N) &= \frac{1}{2} (\text{tr}(MN) + \text{tr}(NM)) \\
&= \frac{1}{2} (\text{tr}({}^t(MN)) + \text{tr}(NM)) \\
&= \frac{1}{2} (-\text{tr}(NM) + \text{tr}(NM)) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, on en déduit $M \in S_n(\mathbb{R})^\perp$.

Donc, $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$.

$\hookrightarrow$ Par la réduction de Gauss on voit que $q|_{S_n}$ est non dégénérée.

Donc, on a $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})^\perp$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\dim(S_n(\mathbb{R})^\perp) &= \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(S_n(\mathbb{R})) \\
&= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

$$= \dim(A_n(\mathbb{R})).$$

Par cardinalité on obtient $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^\perp$ $\square$

* Annexe:

$$A_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ antisymétrique c-a-d } {}^t M = -M \}$$

• Soit A antisymétrique $\Rightarrow \text{Tr}(A) = 0$.

Démo:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0.$$

- Soit A antisymétrique $\Rightarrow \text{Tr}(A)=0$.

Démo:

On a A antisymétrique.

Soit u l'endo. associé à A .

On a $\langle u(x), x \rangle = 0, \forall x \in E$.

Et $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), e_i \rangle = 0. \quad \square$

- u antisymétrique $\Leftrightarrow \langle u(x), x \rangle = 0, \forall x \in E$.

Démo:

$\Rightarrow$ u antisymétrique c-a-d $u^* = -u$.

Soit $x \in E$, on a:

$$\langle u(x), x \rangle = \langle x, u^*(x) \rangle = \langle x, -u(x) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle u(x), x \rangle = 0.$$

$\Leftarrow$ Soit $x, y \in E$. On a

$$\langle u(x+y), x+y \rangle = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\langle u(x), x \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle u(y), y \rangle}_{=0} + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle u(x), y \rangle = -\langle u(y), x \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, -u(y) \rangle$$

$$\Rightarrow u^* = -u \quad \square$$

- $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démo:

Par récurrence sur n

- Initialisation:

$$n=1. \quad \text{On a } S_1(\mathbb{R}) = \Pi_1(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \dim 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

- Hérédité:

Vraie au rang k . M. q vraie au rang $k+1$.

On a $(f_1, \dots, f_{\frac{k(k+1)}{2}})$ base de $S_k(\mathbb{R})$.

$$\text{Notons } e_i = \begin{bmatrix} f_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall i \in \llbracket 1, \frac{k(k+1)}{2} \rrbracket$$

$$\text{On complète par les } p_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ème place}}}{1} \end{bmatrix} \quad \text{pour } j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket.$$

Donc $(e_1, \dots, e_{\frac{k(k+1)}{2}}, p_1, \dots, p_{k+1})$ base de $S_{k+1}(\mathbb{R})$.

$$\text{Donc } \dim(S_{k+1}(\mathbb{R})) = \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Donc vraie au rang $k+1$.

- c.c.l. : vraie

- $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$

$$\dim(V \cap W) = \frac{\dim V + \dim W - \dim(V+W)}{2}$$

Démo:

rien à dire avec le fait que les matrices qui engendrent $A_n(\mathbb{R})$ sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

• Formule polaire: $\mathfrak{L}(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$

Démo:

$$q(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) \quad \text{b.F.B.S}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} &= \frac{(b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y)) - b(x, x) - b(y, y)}{2} \\ &= b(x, y). \end{aligned} \quad \text{et carac } \neq 2.$$

• $q|_F$ non dégénérée alors $E = F \oplus F^\perp$. (Lemme dev 40)

Démo:

* M.g $F \cap F^\perp = \{0\}$:

Soit $x \in F \cap F^\perp$ alors $\mathfrak{L}(x, x) = 0 = q(x) = q|_F(x)$
alors $x = 0$ car $q|_F$ est définie.

Donc, $F \cap F^\perp = \{0\}$

* $\forall x \in E, \exists y \in F, z \in F^\perp$ t.q $x = y + z$:

Soit $k = \dim F$. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ base de F .

Soit $x \in E$.

Posons $\lambda_i = \frac{\mathfrak{L}(e_i, x)}{q(e_i)}$, $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in F$.

Alors, $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, to car $q|_F$ définie

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(e_j, x - y) &= \mathfrak{L}(e_j, x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathfrak{L}(e_j, e_i) \\ &= \mathfrak{L}(e_j, x) - \underbrace{\lambda_j \mathfrak{L}(e_j, e_j)}_{=0 \text{ si } j \neq i} \\ &= \mathfrak{L}(e_j, x) - \frac{\mathfrak{L}(e_j, x)}{\mathfrak{L}(e_j, e_j)} \mathfrak{L}(e_j, e_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $z := x - y \in F^\perp$

Donc $x = z + y$ où $y \in F$ et $z \in F^\perp$.

* Conclusion:

$E = F \oplus F^\perp \quad \square$

• $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \quad A = \underbrace{\frac{A+A^t}{2}}_{\in S_n} + \underbrace{\frac{A-A^t}{2}}_{\in A_n}$

Forme quadratique ou ra rac

Rappel:

$$S_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M \} \text{ et } A_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = -M \}.$$

On a:

$$\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Thm:

Soit $q: M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{Tr}(M^2)$.

Alors, q est une Forme Quadratique de rang n^2 et de signature:

$$\text{sign}(q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

et non dégénérée.

De plus, $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$.

Démo:

* M.q. q F.Q.

Prenons $\mathcal{L}: (M, N) \mapsto \frac{1}{2} (q(M+N) - q(M) - q(N))$ avec $M, N \in M_n(\mathbb{R})$

On a: pour $M, N \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(M, N) &= \frac{1}{2} (\text{Tr}((M+N)^2) - \text{Tr}(M^2) - \text{Tr}(N^2)) \\ &= \frac{1}{2} [\text{Tr}(M^2) + \text{Tr}(MN) + \text{Tr}(NM) + \text{Tr}(N^2) - \text{Tr}(M^2) - \text{Tr}(N^2)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{Tr}(MN) + \text{Tr}(NM)] \\ &= \text{Tr}(MN) \quad \leftarrow \text{F.B.S.} \end{aligned}$$

Donc, q est une F.Q. de forme polaire $\mathcal{L}$.

reduction de base

Soit $M = (m_{ij})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in M_n(\mathbb{R})$.

On a:

$$\begin{aligned} q(M) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ji} m_{ij} = \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_{ji} m_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ji} m_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{2} (m_{ij} + m_{ji})^2 - \frac{1}{2} (m_{ij} - m_{ji})^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{m_{ii}^2}_{L_{ii}} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\underbrace{(m_{ij} + m_{ji})^2}_{L_{ij}} - \underbrace{(m_{ij} - m_{ji})^2}_{L_{ji}} \right) \end{aligned}$$

On a L_{ii} , L_{ij} et L_{ji} formes lin. indé.

* Signature:

$$\text{sign}(q) = \left(n + \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

* rang:

$$\text{rg}(q) = \frac{n}{2} (n+1 + n-1) = n^2 = \dim(M_n(\mathbb{R})).$$

Donc, q non dégénérée.

* Orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$:

$\hookrightarrow$ Soient $M \in S_n(\mathbb{R})$ et $N \in A_n(\mathbb{R})$. On a:

$${}^t(MN) = {}^t N {}^t M = -NM.$$

$$\text{Donc, } \mathcal{L}(M, N) = \frac{1}{2} [\text{Tr}(MN) + \text{Tr}(NM)] = \frac{1}{2} [\text{Tr}(NM) + \text{Tr}(NM)] = 0$$

Donc, $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$.

$\hookrightarrow$ De plus, $\mathcal{L}|_{S_n}$ non-dégénérée.

Donc,

$$\begin{aligned} \dim(S_n(\mathbb{R})^\perp) &= \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(S_n(\mathbb{R})) \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(A_n(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Donc, par cardinalité:

$$A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^\perp \quad \square$$